POTENTIALTHEORIE

Kann man aus Ladungs- und Stromverteilungen die Potentiale ermitteln, so lassen sich auch die Feldkonfigurationen leicht bestimmen. Daher ist die Potentialtheorie wichtig.

[H14] *Spiegelladungsmethode* **[$2 + 2 + 1 + 1 = 6$ Punkte]**

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Kugel mit Radius r befinde sich im Abstand $a > r$ eine Ladung q. Zeigen Sie, dass der Potentialwert $\phi(\vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| = r$ sich auch ergibt, wenn man statt der Kugel an geeigneter Stelle im Abstand $b < r$ eine zweite Ladung q', die Spiegelladung, anbringt.

(a) Zeichnen Sie dazu die Orte beider Ladungen und die Äquipotentiallinie $|\vec{x}| = r$, und begründen Sie die Gleichung

$$0 = \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\varphi}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi}} \quad \forall\, \varphi\,.$$

(b) Beide Terme sind von der Form $\pm 1/\sqrt{A + B\cos\varphi}$, und können sich nur bei passenden Koeffizienten A und B für alle φ wegheben. Zeigen Sie, dass $q' = -q\sqrt{b/a}$ und $b = r^2/a$ gelten muss, und dass demnach

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{\frac{r}{|\vec{x}_0|}}{|\vec{x} - \frac{r^2}{\vec{x}_0^{\,2}}\vec{x}_0|}\right)$$

das Potential einer Punktladung q ist, die sich am Ort $\vec{x}_0$ außerhalb einer leitenden, geerdeten Kugel mit Radius r befindet.

(c) Zeigen Sie, dass der Ort der zweiten Ladung gerade durch die Inversion des Ortes der Punktladung an der Kugeloberfläche mit Radius r gegeben ist.

(d) Welche Kraft übt die Kugel auf die Punktladung aus?

[H15] *Magnetischer Monopol* **[$3 + 2 + 1 = 6$ Punkte]**

Wenn es einen magnetischen Monopol der Ladung $4\pi g$ gäbe, der im Ursprung ruht, hätte er ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{r^2}\vec{e}_r$. Da es außerhalb $\vec{r} = 0$ divergenzfrei ist, lässt es sich in sternförmigen Umgebungen von $\vec{r} \neq 0$, zum Beispiel außerhalb der positiven z-Achse ($x = y = 0$, $z \geq 0$) als Rotation eines Vektorpotentials $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}_S$ und außerhalb der negativen z-Achse als $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}_N$ darstellen (hierbei stehen S bzw. N für Süd bzw. Nord). Konkret gilt

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{g}{r(r-z)}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_N(\vec{r}) = \frac{g}{r(r+z)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie dies, indem Sie $\mathrm{rot}A_S$ außerhalb der z-Achse berechnen und mit $g\vec{e}_r/r^2$ vergleichen.

(b) Bestätigen Sie, dass sich beide Vektorpotentiale im gemeinsamen Gültigkeitsbereich ($x^2 + y^2 > 0$) nur um eine Eichtransformation unterscheiden,

$$\vec{A}_N(\vec{r}) - \vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{2g}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = (2g)\mathrm{grad}(\chi)\,, \quad \chi = \arctan\frac{y}{x}\,.$$

(c) Wieso erfüllt demnach $\mathrm{rot}\vec{A}_N = g\vec{e}_r/r^2$ außerhalb der negativen z-Achse?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!